CÁLCULO 2º EXAMEN PARCIAL 4-6-2014	1er APELLIDO: ______ 2º APELLIDO: ______ NOMBRE: ______
1ºG.I.INFORMÁTICA DMA FI-UPM	Nº MATRÍCULA: ☐☐☐☐☐☐ NOTA: ☐

1. (*2 puntos*) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

estudie la continuidad y diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

2. Si la función $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8xy + 2$ modeliza el relieve de cierta región, entonces:

   a) (*0,5 puntos*) Justifique que en el lugar representado por el punto $(1,2,f(1,2))$ el relieve “se parece mucho” a un plano y determine una ecuación del mismo.

   b) Si un senderista se halla en un lugar representado por el punto $(1,0,f(1,0))$:

   - (*0,5 puntos*) ¿Asciende o desciende al moverse desde dicho punto según la dirección sureste? (Nota: Se considera que la dirección norte vienen representada por el vector $(0,1)$).
   - (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la dirección (y sentido) de pendiente máxima en ese punto y cuál es dicha pendiente?
   - (*0,5 puntos*) ¿Qué dirección debe tomar, en ese punto, para mantener la altitud?

   c) (*1 puntos*) ¿Hay alguna cumbre en la región que modeliza la función?

   d) (*2 puntos*) Si el senderista recorre un camino modelizado por los puntos $(x,y,f(x,y))$, donde (x,y) son los puntos del conjunto

   $$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 1\right\},$$

   ¿cuáles serán la altura máxima y la altura mínima que alcanzará? (Nota: Si se quiere que el modelo tenga un sentido real se puede considerar que la unidad de medida es el hectómetro).

3. (*1,5 puntos*) Calcule la integral

$$I = \iint_D ye^x \, dxdy,$$

donde D es la región del primer cuadrante del plano XY acotada entre las curvas $y^2 = x$, $y^2 = x/2$ y la recta $x = 1$.

4. (*1,5 puntos*) Calcule el volumen del sólido acotado que está limitado por el plano $z = 0$, el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIONES 2º EXAMEN PARCIAL
(4-6-2014)

1. Continuidad y diferenciabilidad en $(0,0)$ de

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

CONTINUIDAD:

Se trata de estudiar si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3y^3}{x^2+y^2}$ y coincide con $f(0,0)=0$.

Vemos que este límite presenta una indeterminación $\frac{0}{0}$, para intentar resolverla consideramos las coordenadas polares con origen en $(0,0)$:

$$f(\rho\cos\theta,\rho\,\text{sen}\,\theta)=\frac{3\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2}=3\rho\underbrace{\cos^3\theta}_{\text{función acotada en }[0,2\pi]}$$

Entonces:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3y^3}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to0}3\rho\cos^3\theta=0$$

Por tanto, $\boxed{f \text{ es continua en } (0,0)}$

DIFERENCIABILIDAD:

- Existencia de derivadas parciales en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0/x^2}{x}=\lim_{x\to0}0=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{3y^3/y^2}{y}=\lim_{y\to0}3=3$$

- Existencia de plano tangente (diferenciabilidad):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\left(f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot(y-0)\right)}{\|(x,y)-(0,0)\|}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{3y^3}{x^2+y^2}-(0+0\cdot x+3y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-3yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Este límite no existe pues dados los subconjuntos:

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \; : \; x=0\}$$

$$S_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \; : \; \begin{matrix} y=x \\ x>0 \end{matrix}\right\}$$

se tiene:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} \frac{-3yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{|y|^3} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} \frac{-3yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-3x^3}{(2x^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-3x^3}{2\sqrt{2}\cdot|x|^3} \underset{|x|=x}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-3x^3}{2\sqrt{2}\, x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Por tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

$\boxed{2}$ $f(x,y) = x^2+4y^2-8xy+2$

a) Cerca del lugar representado por $(1,2,f(1,2)) = (1,2,3)$ la región se "parece mucho a un plano" porque f es diferenciable en $(1,2)$ al tratarse de un polinomio. Una ecuación de dicho plano es:

$$z = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)$$

$$\iff \quad z = 3 - 14(x-1) + 8(y-2)$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x-8y \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y-8x \end{array}\right] (*)$$

$$\boxed{14x - 8y + z - 1 = 0}$$

b) • Para saber si asciende o desciende estudiamos la derivada direccional de f según la dirección sureste, que viene representada por el vector $(1,-1)$ (ó por $(\lambda,-\lambda)$ con $\lambda>0$):

$$f'\left((1,0);\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \underset{\boxed{f \text{ diferenciable en } (0,0)}}{=} \nabla f(1,0)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \underset{\boxed{(*)}}{=} (2,-8)\cdot\left(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

Dado que $f'((1,0); (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})) > 0$, el senderista asciende en dicho punto según la dirección sureste.

- La dirección y sentido de pendiente máxima es la dada por el vector gradiente en $(1,0)$, esto es,

$$\nabla f(1,0) \underset{(*)}{=} \boxed{(+2,-8)}$$

y la pendiente es:

$$f'\left((1,0); \frac{\nabla f(1,0)}{\|\nabla f(1,0)\|}\right) = \|\nabla f(1,0)\| = \sqrt{2^2+(-8)^2} = \sqrt{68} = \boxed{2\sqrt{17}}$$

- Para mantener la altitud debe tomar la dirección perpendicular a $\nabla f(1,0)$, esto es; la dada por cualquier (u,v) tal que $\neq (0,0)$

$$\nabla f(1,0) \cdot (u,v) = 0$$

lo que equivale a:

$$(2,-8)\cdot(u,v) = 0 \iff \boxed{u - 4v = 0}$$

Podría considerar el sentido dado por el vector $(4,1)$ ó el dado por $(-4,-1)$.

c) Si hubiera alguna cumbre, en términos matemáticos, significaría que f alcanzaría un máximo relativo en algún punto. Dado que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, éste debe ser un punto crítico, es decir, solución del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 8y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y - 8x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y = x \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Luego, si existiera una cumbre ésta vendría representada por $(0,0,f(0,0))$. Veamos si lo es estudiando la matriz hessiana de f en $(0,0)$:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |Hf(0,0)| = 2\cdot 8 - 64 < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ es un punto de silla de } f.$$

Luego, no existen cumbres

d) $\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4y^2=1\}$

Las alturas máxima y mínima que puede alcanzar el senderista por el camino considerado son los extremos absolutos de f condicionados a Γ.

1) Selección de ptos donde f puede alcanzar extremo absoluto:

Dado que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y que $\mathring{\Gamma}=\phi$; los puntos a seleccionar serán:

- Puntos no regulares de Γ: No existen pues dado que $\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=0\}$, siendo $g(x,y)=x^2+4y^2-1$, se tiene $\nabla g(x,y) = (2x,8y)=(0,0) \Longleftrightarrow (x,y)=(0,0)$, pero $(0,0)\notin\Gamma$.

- Puntos críticos de la función de Lagrange

$F(x,y) = x^2+4y^2-8xy+2 - \lambda(x^2+4y^2-1)$ en Γ, esto es, soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x-8y-2\lambda x = 0 \Longleftrightarrow x(1-\lambda)-4y=0 & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 8y-8x-8\lambda y=0 \Longleftrightarrow -x+(1-\lambda)y=0 & (2)\\ x^2+4y^2=1 \quad (3) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\text{ Si } x\neq 0,\text{ de }(1):\quad 1-\lambda = \dfrac{4y}{x}\\ -\text{ Si } y\neq 0,\text{ de }(2):\quad 1-\lambda = \dfrac{x}{y}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4y}{x}=\frac{x}{y}$$

y dado que $\dfrac{4y}{x}=\dfrac{x}{y} \Longleftrightarrow 4y^2-x^2=0 \Longleftrightarrow (2y-x)(2y+x)=0$

$\Longleftrightarrow y = x/2$ ó $y=-\dfrac{x}{2}$,

Sustituyendo en (3): $x^2+4\cdot\dfrac{x^2}{4}=1 \Longleftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Luego, seleccionamos:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \boxed{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$

- Si $x=0$ de (1) debe ser $y=0$, pero $(0,0) \notin \Gamma$

  Si $y=0$ de (2) debe ser $x=0$, análogamente.

Por tanto, ya se han encontrado todas las soluciones del sistema de Lagrange. (VÉASE NOTA AL FINAL)

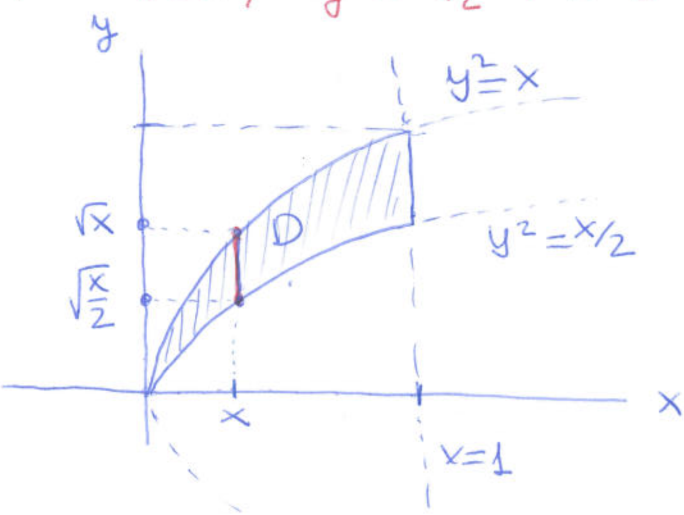
2) Evaluación y conclusión

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 8\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{4} + 2 = 1$$

$$f\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 8\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{4} + 2 = 5$$

Luego, la altura mínima que alcanza el senderista por el camino considerado es de 100 metros mientras que la máxima es de 500 metros.

$\boxed{3}$ $I = \iint_D y e^x \, dx\, dy$ donde D región acotada en 1er cuadrante por $y^2 = x$, $y^2 = x/2$, $x = 1$



La región D se puede describir como región de tipo I:

$$D = \left\{(x,y) : \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x/2} \le y \le \sqrt{x} \end{array}\right\}$$

Luego

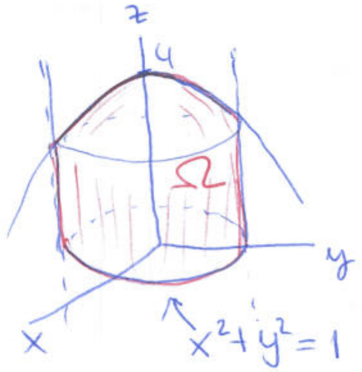
$$I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x/2}}^{\sqrt{x}} y e^x \, dy =$$

$$= \int_0^1 e^x \left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sqrt{x/2}}^{y=\sqrt{x}} \right) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{2}\left(x - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x e^x \, dx \underset{\begin{bmatrix} x = u \\ e^x dx = dv \end{bmatrix}}{=} \frac{1}{4}\left(\left[x e^x\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 e^x \, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e - (e - e^0)\right) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$\boxed{4}$ Volumen del sólido limitado por $z=0$, $z=4-x^2-y^2$
$x^2+y^2=1$



$$V(\Omega)=\iint_D \left(4-x^2-y^2-0\right)\,dx\,dy$$

donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$

Pasando a coordenadas polares $\overline{\varphi}\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\text{sen}\,\theta\end{cases}$

$$V(\Omega)=\iint_{D^*}(4-\rho^2)\,|J\overline{\varphi}(\rho,\theta)|\,d\rho\,d\theta =$$

$$=\iint_{D^*}(4\rho-\rho^3)\,d\rho\,d\theta \underset{\uparrow}{=} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(4\rho-\rho^3)\,d\rho =$$

$D^*=[0,1]\times[0,2\pi]$

$$=2\pi\cdot\left(\left[2\rho^2\right]_0^1-\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\right)=\boxed{\frac{7\pi}{2}}$$

NOTA SOBRE EL APARTADO C) DEL PROBLEMA 2:

Dado que sobre la elipse Γ se verifica

$$f(x,y)=x^2+4y^2-8xy+2 \underset{x^2+4y^2=1}{=} 3-8xy,$$

este apartado se puede resolver de la misma forma que la expuesta pero considerando la función de Lagrange

$$\tilde{F}(x,y)=3-8xy-\lambda(x^2+4y^2-1)$$

en lugar de la dada